Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

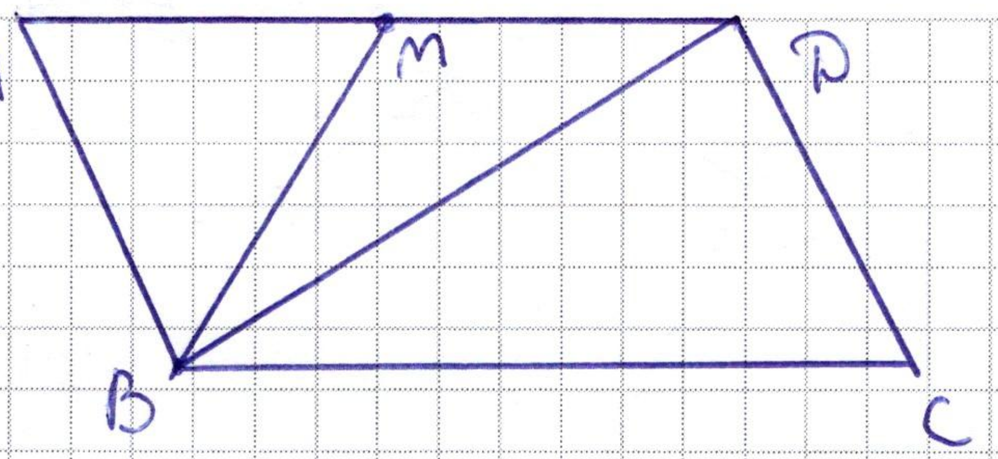
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Для билета

Вариант задания 1

Лист работы 1 из 3

№3



В параллелограмме ABCD проведем медиану BM к стороне AD.

Тогда $AB = AM = 3 \Rightarrow \triangle ABM$ - равнобедренный. $\Rightarrow \angle ABM = \angle AMB$,

а также $\angle AMB = \angle MBC$ (по свойству параллельности AD и BC)

$\Rightarrow \angle ABM = \angle AMB = \angle MBC \Rightarrow$ BM - биссектр. угла $\angle B$. Пусть $\angle B = 4\angle\alpha$ Тогда BM делит этот угол на два, равных $2\angle\alpha$.

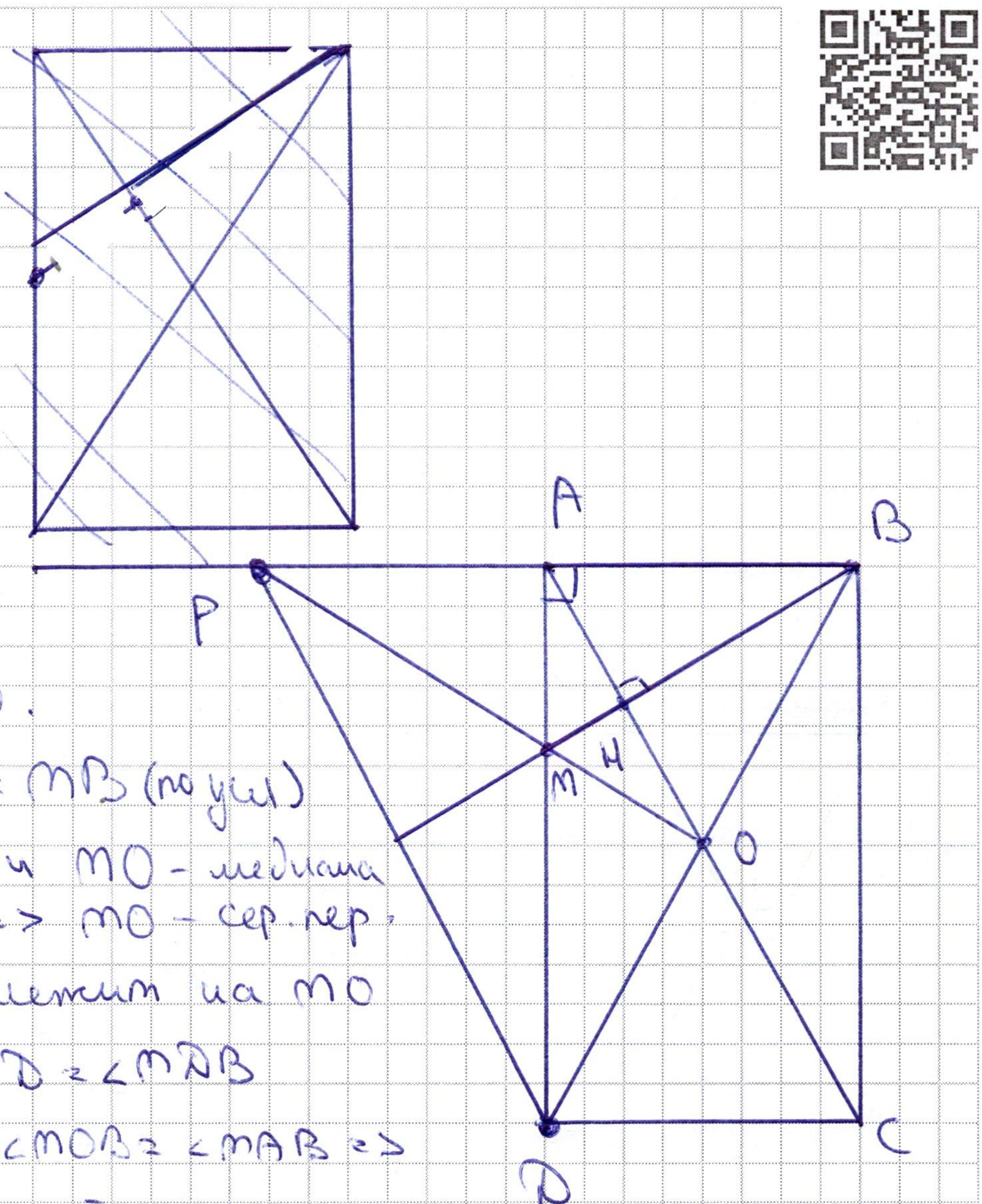
Проведем диагональ BD. $\frac{\angle ABD}{\angle CBD} = \frac{3}{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABD = 3\angle\alpha$ и $\angle CBD = \angle\alpha$. $\Rightarrow \angle MBD = \angle MBC - \angle CBD = \angle\alpha$. Т.к AD || BC, $\angle CBD = \angle MDB = \angle MBD = \angle\alpha \Rightarrow \triangle MBD$ - р/б

$\Rightarrow BM = MD = AM = AB = 3 \Rightarrow \triangle ABM$ - равносторонний $\Rightarrow 2\angle\alpha = 60 \Rightarrow \angle ABD = 3\angle\alpha = \frac{60}{2} \cdot 3 = 90°$. Тогда $BD^2 = AD^2 - AB^2 = 36 - 9 = 27$; $BD = 3\sqrt{3}$. Найдем $S_{\triangle ABD} = \frac{AB \cdot BD}{2} = \frac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{2}$. Но т.к диагональ делит параллелограмм на 2 равновеликих треуг. $S_{ABCD} = 9\sqrt{3} \cdot \left(2 \cdot \frac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{2}\right)$

Можно использовать оборот листа для записи решений

5.



1) O - центр ABCD.

в $\triangle DMB$ $DM = MB$ (по усл.)

$\Rightarrow$ $\triangle DMB$ - р/б и MO - медиана и высота $\Rightarrow$ MO - сер. пер. к BD. Т.к P лежит на MO

$PB = PD$, $\angle MBD = \angle MDB$

Ч.т. $PDB = \angle PBD$

И т.к $MO \perp BD$ $\angle MOB = \angle MAB \Rightarrow$

AMOB - вписанный $\Rightarrow \angle MAO = \angle MBO$.

AH - высота из прямого угла в $\triangle MAB$

$\Rightarrow \angle ABM + \angle AMH = \angle AMH + \angle MAO \Rightarrow \angle ABM = \angle MAO =$

$= \angle MBO = \angle MDO = \angle ADP$. $\Rightarrow$ BH - биссектр и высота и медиана $\Rightarrow AH = HO = \frac{3,2}{4} = 0,8$

б) AD и PO пересек в 1 точке и явл. биссектр. и высотой $\Rightarrow \triangle PBD$ - равносторонний

$\Rightarrow PD = PB = BD = 3,2$

4. $\left| \frac{x(x^2-3)+(x+2)^2-(x^3+6)}{x+\sqrt{\frac{18}{2}}-1} \right| = a^2+1$

Упростим левую часть:

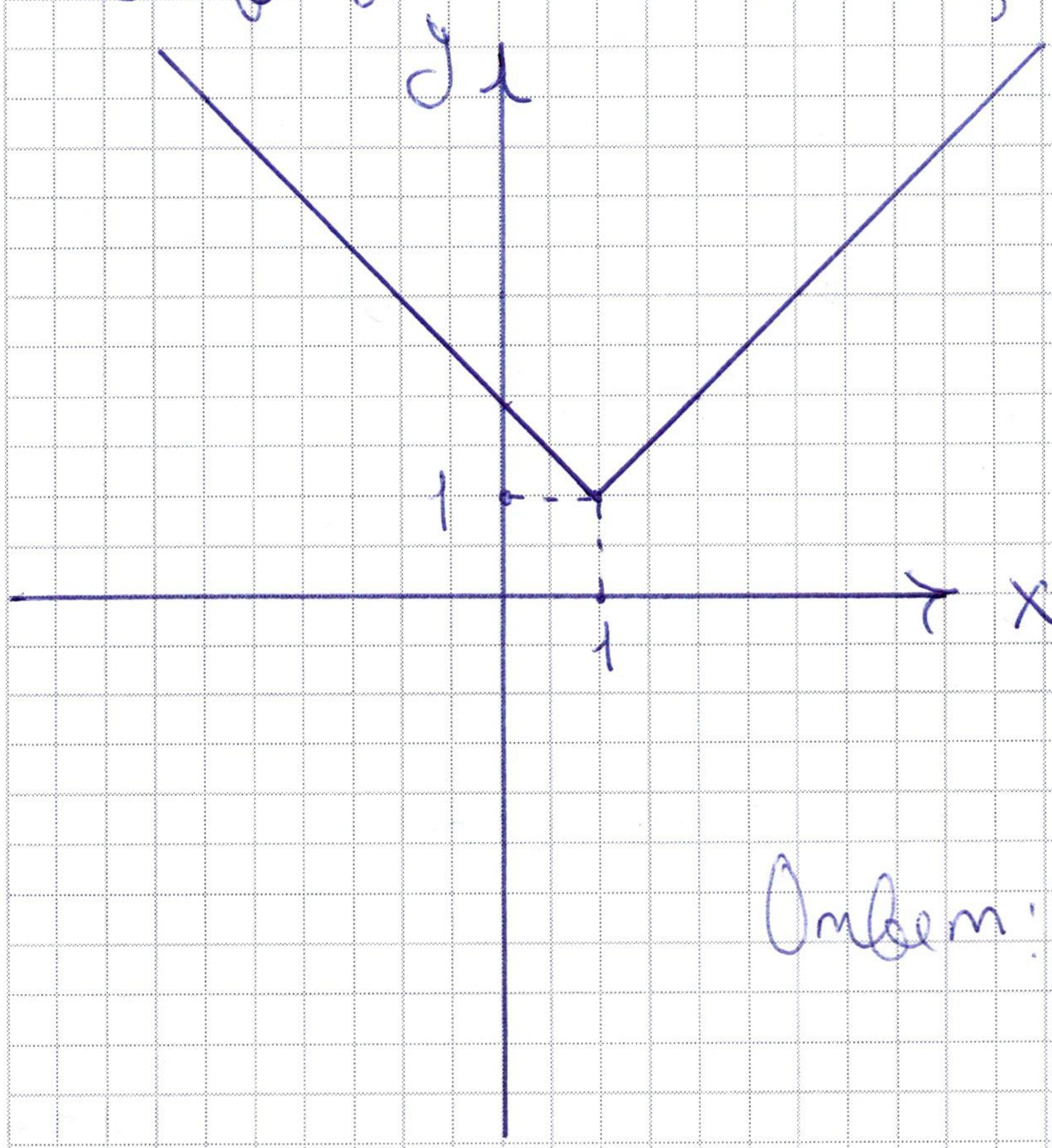
$$\left| \frac{x^3-3x+x^2+4x+4-x^3-6}{x+3-1} \right| =$$

$$= \left| \frac{(x+2)^2-3(x+2)}{x+2} \right| = |x+2-3| = |x-1|$$

Тогда: $|x-1| = a^2-1$

$|x-1|+1 = a^2$

Пусть $y = |x-1|+1 = a^2$, тогда:



Найдем пересечение с осью y:

$y = |0-1|+1 = 2$

Тогда $x < 0$ при $y > 2$

или при $a^2 > 2$

$\Rightarrow a > \sqrt{2}$

Ответ: $a \in (\sqrt{2}; +\infty)$

olymp.bmstu.ru

№1. Пусть x, y, z – скорости "поедания"
Софии, Арсения и Ромы соотв.

Тогда:

$$\begin{cases} 9x + 9y = 0{,}5 & | \cdot 4 \\ 12z + 12y = 0{,}5 & | \cdot 3 \\ 18x + 18z = 0{,}5 & | \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 36x + 36y = 2 \\ 36z + 36y = 1{,}5 \\ 36x + 36z = 1 \end{cases}$$

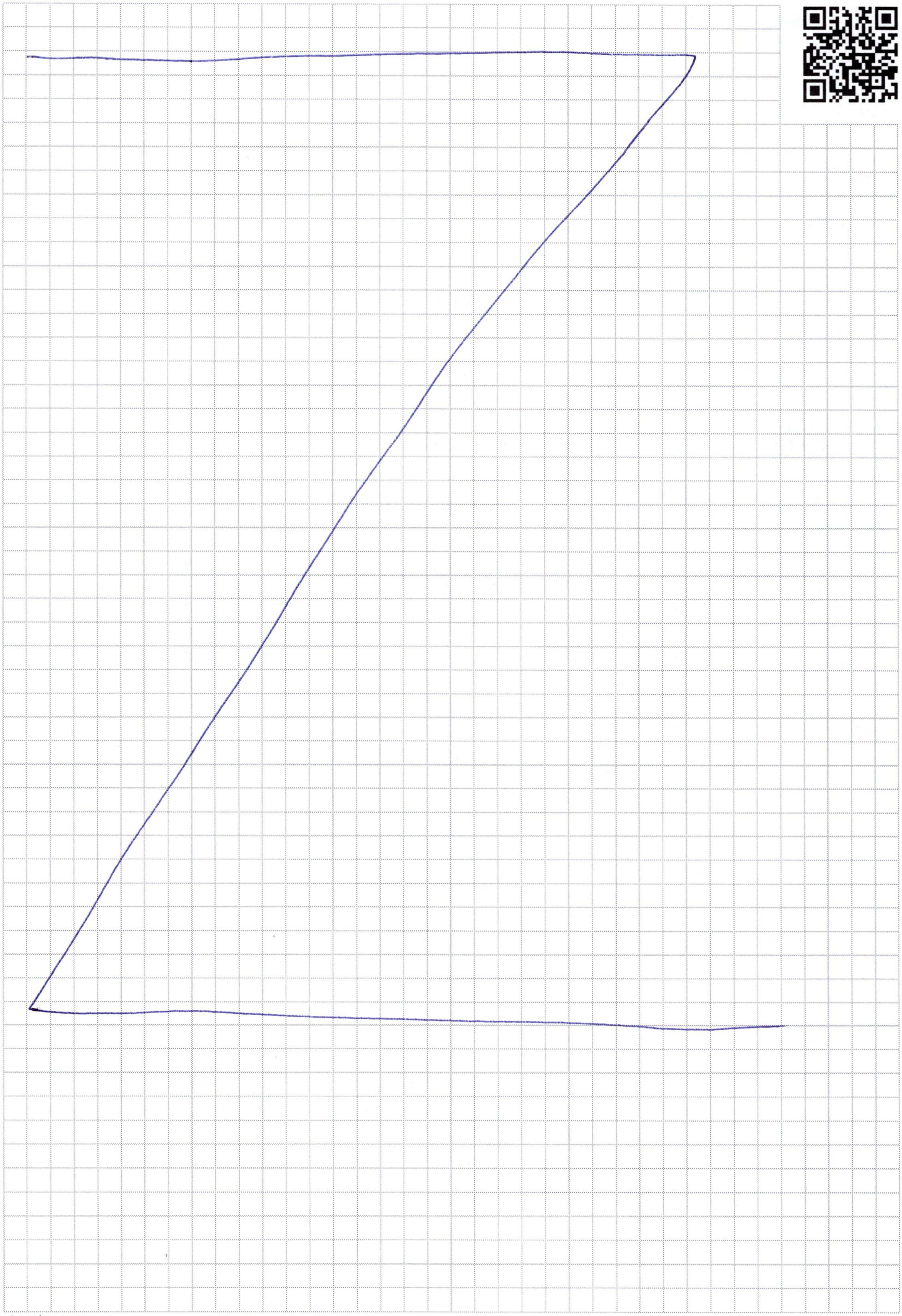
Сложим:

$$2(x + y + z) = 4{,}5 \quad | : 4{,}5$$

$$16(x + y + z) = 1$$ — значит

вместе, Софья, Рома и Арсений съедят

1 кг малины за 16 минут



Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 1

№2.

$(y-2)(3x-12) = 5x^2 - 21x + 4$

$3xy - 12y - 6x + 24 = 5x^2 - 21x + 4$

$3y(x-4) - 5x + 20 = 5x^2 - 20x$

$3y(x-4) - 5(x-4) = 5x(x-4)$

$(x-4)(3y-5) = 5x(x-4)$

$3y - 5 = 5x$

$3y = 5x + 5$

$3y = 5(x+1) \Rightarrow$ Такие пары, как

$(-1;0)$, $(2;5)$ и т.д будут

x y x y

решениями т.к $3y : 5$ и $5(x+1) : 3$

$y : 5$ и $(x+1) : 3$

А также, для обобщения, пары решений примут вид

$(-1+3k; 0+5k)$, где k - целое ч.

Можно использовать оборот листа для записи решений